Tentamen Vectoranalyse

5 juli 2007, 14:00-17:00 uur

Het tentamen bestaat uit de onderstaande **vier** opgaven. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal voor deze opgave te behalen punten vermeld. Je krijgt 10 punten gratis.

Opgave 1 (10+7+8 pt.)
Het oppervlak S is gegeven door de vergelijking

$$z^4 - 4z + f(x,y) = 0,$$

waarbij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^1-functie is. De oorsprong $(0,0,0)$ ligt op S.

1. Gegeven is dat het raakvlak aan S in $(0,0,0)$ door $(2,2,1)$ gaat, en evenwijdig is aan de x-as. Bereken
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ en } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

2. Verder is gegeven dat $f(x,y) \neq 3$, voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Bewijs dat het oppervlak S in een omgeving van elk punt $(x_0, y_0, z_0) \in S$ geschreven kan worden als $z = g(x,y)$, waarbij g een C^1-functie is.

3. Laat g de functie zijn uit onderdeel 2 die S beschrijft in een omgeving van het punt $(0,0,0)$. (De gegevens van de eerste twee onderdelen gelden nog steeds.) Bereken de eerste-orde partiële afgeleiden van g in $(0,0)$.

Opgave 2 (10+7+8 pt.)
De functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.
S is het boloppervlak gegeven door $g(x,y,z) = 0$, met $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

1. Toon aan dat f op S zes kritieke punten heeft.

2. Bepaal de maximale en minimale waarde van f op S, en toon aan dat zowel het maximum als het minimum in twee verschillende (kritieke) punten wordt aangenomen.

3. Toon aan dat de overige (twee) kritieke punten van f op S geen locale extrema zijn (gebruik hierbij de Hessianen van f en g).

Z.O.Z.

Opgave 3 (10+10 pt.)
Het vectorveld $\mathbf{F}$ op $\mathbb{R}^3$ is gegeven door:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = ayz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}, \tag{1}$$

waarbij a een constante is. Het boloppervlak $S \subset \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}. \tag{2}$$

1. Voor $-1 < b < 1$ is C_b de doorsnijding van het vlak $z = b$ en het boloppervlak S. Bereken

$$\int_{C_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

2. Bewijs dat voor elke gesloten C^1-kromme C op S geldt:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{d.e.s.d.a.} \quad a = 1.$$

Opgave 4 (10+10 pt.)
Het vectorveld $\mathbf{F}$ op $\mathbb{R}^3$ is weer gegeven door (1), en het boloppervlak S door (2), zie opgave 3.

1. Bewijs dat voor dit vectorveld $\mathbf{F}$ en elk gesloten glad oppervlak Σ geldt:

$$\iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

2. Voor $-1 < b < 1$ is S_b het gedeelte van S dat boven het vlak $z = b$ ligt, d.w.z.

$$S_b = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq b\}.$$

   Bewijs dat voor $-1 < b < 1$ geldt:

$$\iint_{S_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Uitwerkingen

Opgave 1. Laat $F(x,y,z) = z^4 - 4z + f(x,y)$, dan is $S = \{(x,y,z) \mid F(x,y,z) = 0\}$.

1. Het raakvlak aan S in $(0,0,0)$ heeft vergelijking

$$\nabla F(0,0,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Aangezien

$$\nabla F(0,0,0) = f_x(0,0)\,\mathbf{i} + f_y(0,0)\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}, \tag{3}$$

wordt deze vergelijking

$$f_x(0,0)x + f_y(0,0)y - 4z = 0.$$

Dit vlak gaat door $(2,2,1)$, dus:

$$2f_x(0,0) + 2f_y(0,0) - 4 = 0. \tag{4}$$

Het is evenwijdig aan de x-as, dus staat zijn normaal $\nabla F(0,0,0)$ loodrecht op $\mathbf{i}$. M.a.w.:

$$f_x(0,0) = 0. \tag{5}$$

Uit (4) en (5) volgt:

$$f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 2. \tag{6}$$

2. Laat $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Voldoende is te bewijzen dat

$$\frac{\partial F}{\partial z}(p_0) \neq 0. \tag{7}$$

Immers, volgens de Impliciete Functiestelling geldt dan: er is een C^1-functie g, gedefiniëerd op een omgeving van (x_0, y_0), zó dat $g(x_0, y_0) = z_0$, en $F(x,y,z) = 0$ heeft in de buurt van p_0 als oplossing $z = g(x,y)$.

We bewijzen (7) uit het ongerijmde. Stel dus $\frac{\partial F}{\partial z}(p_0) = 0$, m.a.w., stel dat $4z_0^3 - 4 = 0$. Dan geldt: $z_0 = 1$. Maar dan is $F(x_0, y_0, z_0) = -3 + f(x_0, y_0) \neq 0$, dus $p_0 \notin S$. Uit deze tegenspraak volgt: $\frac{\partial F}{\partial z}(p_0) \neq 0$.

3. Uit $F(x,y,g(x,y)) = 0$ volgt via impliciet differentiëren:

$$F_x(x,y,g(x,y)) + g_x(x,y)\,F_z(x,y,g(x,y)) = 0,$$
$$F_y(x,y,g(x,y)) + g_y(x,y)\,F_z(x,y,g(x,y)) = 0.$$

Uit (3) en (6) volgt:

$$\nabla F(0,0,0) = 2\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}. \tag{8}$$

Neem $x = 0$ en $y = 0$, en maak gebruik van $g(0,0) = 0$ en (8) om te concluderen:

$$g_x(0,0) = 0, \quad g_y(0,0) = \tfrac{1}{4}F_y(0,0) = \tfrac{1}{2}.$$

Opgave 2. We moeten de extrema van $f(x,y,z)$ bepalen onder de nevenvoorwaarde $g(x,y,z)=0$. We gebruiken de methode van Lagrangemultiplicatoren, en lossen op:

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= \lambda \nabla g(x,y,z), \\ g(x,y,z) &= 0. \end{aligned}$$

Dit geeft het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} 2x &= 2\lambda x, \\ 4y &= 2\lambda y, \\ 6z &= 2\lambda z, \\ x^2+y^2+z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Als $x \neq 0$, dan volgt uit de eerste vergelijking $\lambda = 1$. De tweede en derde vergelijking reduceren dan tot:

$$\begin{aligned} 2y &= y, \\ 3z &= z. \end{aligned}$$

Hieruit volgt: $y = z = 0$. Invullen hiervan in $g(x,y,z) = 0$ geeft $x = \pm 1$. We vinden dus:

$$(\lambda; x, y, z) = (1; \pm 1, 0, 0).$$

Als $y \neq 0$ vinden we analoog $(\lambda; x, y, z) = (2; 0, \pm 1, 0)$, terwijl onder de aanname $z \neq 0$ geldt $(\lambda; x, y, z) = (3; 0, 0, \pm 1)$. De functie $f|_S$ heeft dus de kritieke punten

$$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0) \text{ en } (0, 0, \pm 1).$$

2. De functie f is continu, en heeft op de gesloten en begrensde (dus compacte) verzameling S dus een maximum en een minimum. Deze extrema worden aangenomen in een kritiek punt van $f|_S$. Nu geldt:

$$f(\pm 1, 0, 0) = 1 < f(0, \pm 1, 0) = 2 < f(0, 0, \pm 1) = 3.$$

Dus f neemt op S zijn minimale waarde 1 aan in $(\pm 1, 0, 0)$, en zijn maximale waarde 3 in $(0, 0, \pm 1)$.

3. Voor $(\lambda; x, y, z) = (2; 0, \pm 1, 0)$ vormen we de gerande Hessiaan, horend bij de Lagrange-functie

$$L(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = -x^2 + z^2 + 2.$$

De bijbehorende matrix is

$$\begin{aligned} \mathrm{HL}(2; 0, \pm 1, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & -g_x & -g_y & -g_z \\ -g_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ -g_y & L_{xy} & L_{yy} & L_{yz} \\ -g_z & L_{xz} & L_{yz} & L_{zz} \end{pmatrix}_{(2;0,\pm 1,0)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mp 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ \mp 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De bijbehorende minoren hebben dus de waarde

$$d_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mp 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ \mp 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8,$$

en

$$d_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mp 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ \mp 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16.$$

Omdat er één randvoorwaarde is ("$k = 1$"), bekijken we de rij

$$-d_3 < 0, -d_4 < 0,$$

en concluderen dat $f|_S$ in $(0, \pm 1, 0)$ noch een minimum, noch een maximum heeft.

Opgave 3.

1. Een parametrisering van C_b is

$$\mathbf{x}(t) = (\sqrt{1-b^2}\,\cos t, \sqrt{1-b^2}\,\sin t, b), \text{ met } 0 \le t \le 2\pi.$$

Dus:

$$\begin{aligned}
\int_{C_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{t=0}^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)\,dt \\
&= \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} ab\sqrt{1-b^2}\sin t \\ b\sqrt{1-b^2}\cos t \\ (1-b)^2 \sin t \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{1-b^2}\sin t \\ \sqrt{1-b^2}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_{t=0}^{2\pi} b(1-b^2)(\cos^2 t - a\sin^2 t)\,dt \\
&= \pi b(1-b^2)(1-a).
\end{aligned}$$

2. We moeten twee beweringen bewijzen:

(i) *Als $a \neq 1$, dan is er een gesloten kromme C op S met $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$.*
Uit onderdeel 1 volgt dat voor $a \neq 1$ geldt:

$$\int_{C_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq 0, \text{ voor } 0 < |b| < 1.$$

Neem dus bijvoorbeeld $C = C_{1/2}$.

(ii) *Als $a = 1$, dan geldt voor elk gesloten pad C op S dat $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$.*
Welnu:

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

M.a.w.: $\mathbf{F}$ is een conservatief vectorveld op $\mathbb{R}^3$. Dan geldt voor elk gesloten pad in $\mathbb{R}^3$:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

dus in het bijzonder geldt dit voor elk gesloten pad C op S.

Opgave 4.

1. Laat V het volume zijn dat door Σ wordt ingesloten. Dan geldt volgens de divergentiestelling van Gauß:

$$\iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = 0.$$

2. Laat de schijf D_b het deel van het vlak $z = b$ zijn dat binnen S ligt, dus:

$$D_b = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1 - b^2, z = b\}.$$

Als we D_b oriënteren met de normaal $-\mathbf{k}$, dan vormt deze schijf samen met S_b een stuksgewijs glad gesloten oppervlak. De bewering van onderdeel 1 van deze opgave geldt ook voor *stuksgewijs* gladde gesloten oppervlakken, dus:

$$\iint_{S_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{D_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{9}$$

Een parametrisering van D_b is

$$\mathbf{X}(s, t) = (s \cos t, s \sin t, b), \text{ met } 0 \leq s \leq \sqrt{1 - b^2}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned}
\iint_{D_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{D_b} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) \, dS \\
&= \iint_{D_b} -xy \, dS \\
&= -\int_{s=0}^{\sqrt{1-b^2}} \int_{t=0}^{2\pi} (s \cos t)(s \sin t) \, s \, dsdt \\
&= -(\int_{s=0}^{\sqrt{1-b^2}} s^3 \, ds) \, (\int_{t=0}^{2\pi} \cos t \sin t \, dt) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Bij de derde gelijkheid hebben we gebruikt dat $\mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_t = s \, \mathbf{k}$, dus $||\mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_t|| = s$. Met (9) volgt uit de voorgaande afleiding:

$$\iint_{S_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$